《予習動画４付録「電気力線」補足資料》

電気力線の性質の１つに、「電気力線は交差しない」というものがある（予習動画２「静電界２（電界とその性質）」参照)。　予習動画４付録「電気力線（電気力線の描き方について)」で電気力線を表す微分方程式を導出したが、本補足資料では、その微分方程式が「電気力線は交差しない」という性質を表していることを示す。

［問題］２つの点電荷 Q と$-Q$ $(Q > 0)$を、それぞれ x-y 平面の２点（－１,０）と（１,０）に置いたとき、平面内に生じる電気力線を描くことを考える。

［導出された微分方程式］（導出過程は、予習動画４付録「電気力線」を参照）

$$y' = y\frac{\left((x+1)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left((x-1)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x-1)\left((x+1)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - (x+1)\left((x-1)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

［この微分方程式の性質］

この式は、

$$y' = f(x,y)$$

の形をしている。(定義域 D は、２点（－１,０）と（１,０）を除いた、x-y 平面全体)

この方程式の解を、$y = g(x)$ とする。

ここで、上の微分方程式の右辺の $f(x,y)$ について、以下のことが言える。

１）　$f(x,y)$ は初等関数（ここでは有理関数）であるので、D で連続かつ y について偏微分可能。

２）　$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ も初等関数（ここでは有理関数）であるので、D で連続である。(f は C^1 級である)

３）　したがって、$f(x,y)$ は Lipschitz 条件をみたす。

４）　よって、初期条件 $g(a) = b$ （$(a,b) \in D$）をみたす解は、D においてただ１つである。

５）　以上から、D は解曲線 $y = g(x)$ によって、一重に（交差せずに）隙間なく埋めつくされている。

結論として、上で導出された微分方程式は、電気力線の性質の１つである、「電気力線は交差しない」ということを示している、ということができる。（ここでは、正負の２つの点電荷について）

【注１】定義域 D を、２つの点電荷の位置（－１,０）と（１，０）を除いたx-y 平面全体とした。物理的には、この２点以外の平面全体に電気力線は存在することは当然のことであるが、数学的には解の爆発の有無などを考慮しなければならない。この点で、上の議論は厳密さをやや欠いていることをおことわりしておく。

【注２】x-y 平面の原点（０,０）に置かれた単一の点電荷の場合、微分方程式は、

$$y' = \frac{y}{x}$$

となるので（予習動画４付録「電気力線」参照)、同様に「電気力線は交差しない」ことを示している。

【注３】電気力線の「本数」には、電場１V/m 当り１本という条件（定義）があるので、電気力線は空間を埋めつくしている訳ではないが、空間内の各点での電場ベクトルを接線とするような曲線が電気力線であるので、流体力学での流線のように、空間を埋めつくしているとも言える。

【謝辞】本補足資料について、中央大学理工学部数学科　伊藤弘道教授から有益な示唆を頂いた。

【参考文献】

上の１）２）について

青木利夫、吉原健一「改訂　微分方程式要論」培風館（1986）

３）について

柳田英二、栄伸一郎「常微分方程式論」(講座「数学の考え方」7）朝倉書店（2002）

４）５）について

木村俊房「常微分方程式」(共立数学講座 13）共立出版（1974）

俣野博「微分方程式Ｉ」(岩波講座　応用数学　［基礎４］）岩波書店（1993）

ポントリャーギン「常微分方程式」(木村俊房校閲、千葉克裕訳）共立出版（1968）