対数グラフの使い方

課題：コンデンサーの放電現象の測定結果からaとbを求めよ

$$V=be^{-at}$$

時間t[s]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
電圧V[V]	1000	607.0	368.0	223.0	135.0	82.0
$\ln V$						

①表の空欄を埋めよ。

②普通方眼紙にV(縦)-t(横)のグラフを作図せよ 。

③普通方眼紙に$\ln V$(縦)-t(横)のグラフを作図し、aとbを求めよ。

$\ln V$-tのグラフからaを出す方法

- $V=be^{-at}$　$V=\dfrac{b}{e^{at}}$　　$Ve^{at}=b$

両辺にlnを取ると　　$\ln(e^{at})=at\cdot\ln e$

$\ln(Ve^{at})=\ln b$　　$\ln e=\log_e e=1$

$\ln V+\ln e^{at}=\ln V+at\cdot\ln e$　　$\log xy=\log x+\log y$

$\ln V+at=\ln b$

$\ln V=-at+\ln b$　　$y=-ax+b$

この式のlnV-tグラフとの対応は？

課題：コンデンサーの放電現象の測定結果からaとbを求めよ

$$V=be^{-at}$$

時間t[s]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
電圧V[V]	1000	607.0	368.0	223.0	135.0	82.0
$\ln V$	6.91	6.40	5.91	5.40	4.90	4.41

aは$\ln V$-tグラフの傾き：　$a=50.0\mathrm{s}^{-1}$

bは$t=0$の時の電圧の値：　$b=1000\mathrm{V}$

コンデンサーの放電現象から*指数関数の意味を考察せよ*

$$V=be^{-at}$$

時間t[s]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
電圧V[V]	1000	607.0	368.0	223.0	135.0	82.0

0.01s間の電圧の変化量　393　239　145　88　53

指数関数にしたがう現象は、一定時間(0.01秒間)あたりの変化量は一定ではない。しかしながら一定時間の①は一定であり、今回は②%である。

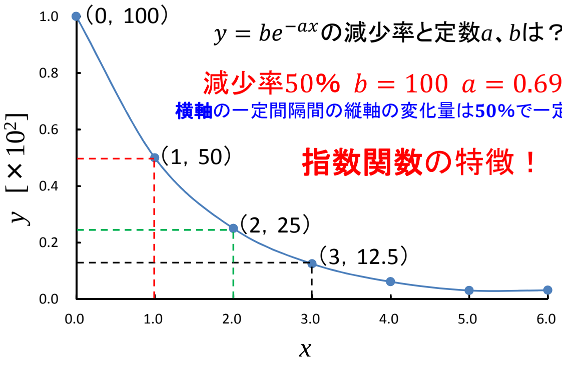
正解　①変化率(減少率)　②39.3%

$y=be^{-ax}$の減少率と定数a、bは？

減少率50%　$b=100$　$a=0.693$

横軸の一定間隔間の縦軸の変化量は50%で一定

指数関数の特徴！



減少率50% に相当するaの値は0.693

指数関数　$V = be^{-at}$

指数関数にしたがう現象は、一定時間の変化量は異なるが、変化率は一定である。

上記式の電圧の変化率に対応するのは

$\ln V$-tグラフの傾きa

この方式でaを求める欠点は？

電卓で$\ln V$を一つずつ計算し、$\ln V$-tグラフを作図して、傾きaを求めなければならない

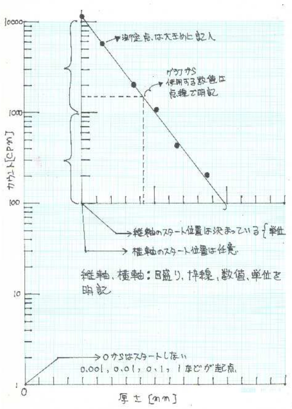
コンデンサーの放電現象の測定結果からaとbを求めよ　$V = be^{-at}$

時間t [s]	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
電圧V [V]	1000	607.0	368.0	223.0	135.0	82.0

①片対数方眼紙にV(縦軸)- t(横軸)のグラフを作図せよ。

②グラフから、aとbを求めよ。

片対数グラフの描き方



①縦軸の起点は0はない
$10^0=1$
0.001　0.01　0.1　1　10　など

②　縦軸の起点は10倍単位でスタート位置は固定

③横軸のスタート位置は任意

④　グラフの枠線、目盛り、数値、測定量と単位は必ず明記

⑤　測定点は大きめに書く

⑥　数値の導出等で使用したグラフの数値は点線で示す

⑦対数軸は目盛間隔が広→狭　等間隔でない

⑧図のように直線を引く

片対数方眼紙の利点

①　大きな部分の変化と小さな部分の変化を同じグラフで見ることができる

②普通方眼紙では見にくい、指数関数的な変化が直線となり見やすい。

③グラフの傾きの相当する数値が、現象の変化率となる。

片対数グラフを使う際の注意点　$y = be^{-ax}$

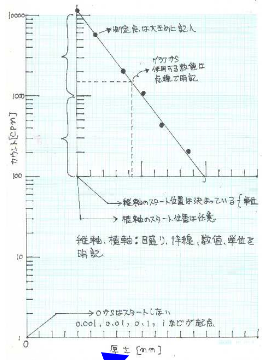
①x=0などのグラフの横軸がゼロの時の縦軸の数値は必ず測定する。

②グラフが直線の場合、指数関数の現象である

③グラフからaに対応する比例定数(λ、μ、τ、B)を求めたい

④定数aは、全体量に対する変化率
指数関数の変化量は時刻によって異なるが、変化率は一定なので、この変化率に対応するaを求めたい。

縦軸はy をlogy相当の位置に自動換算



横軸は普通方眼紙と同じ

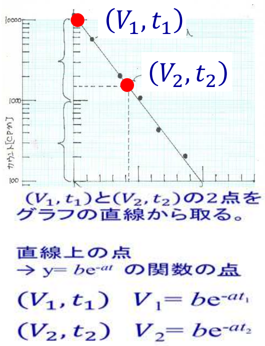
問題　片対数方眼紙から$V= be^{-at}$のaを求めよ

(V_1, t_1)と(V_2, t_2)の2点をグラフの直線から取る。

直線上の点
→ $y= be^{-at}$ の関数の点

(V_1, t_1)　$V_1= be^{-at_1}$

(V_2, t_2)　$V_2= be^{-at_2}$



使用する公式

$\log xy = \log x + \log y$

$\log y - \log x = \log\left(\frac{y}{x}\right)$

$\log_e(e^x) = x\log_e e = x$

$\log_{10}(e^x) = x\log_{10} e$

$\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} e = 0.4343$

$V_1= be^{-at_1} = \frac{b}{e^{at_1}}$　　$b= V_1 e^{at_1}$　式1

$V_2= be^{-at_2} = \frac{b}{e^{at_2}}$　　$b= V_2 e^{at_2}$　式2

片対数方眼紙の縦軸は$\log_{10}$なので、グラフの読み取り値を代入した式1と式2の両辺に$\log_{10}$を取る。

$\log b = \log V_1 + at_1 \times \log e$　式3

$\log b = \log V_2 + at_2 \times \log e$　式4

式（1）（2）の両辺に$\log_{10}$を取る→グラフの縦軸目盛

式（3）（4）を引き算→logの引き算は割り算
→グラフの傾きを求めることに対応

$\log\frac{b}{b} = 0 = \log\frac{V_1}{V_2} + a(t_1 - t_2) \times \log e$

$\log\frac{V_1}{V_2} = -a(t_1 - t_2) \times \log e$

$a = \frac{\log\frac{V_1}{V_2}}{\log e \times (t_2 - t_1)}$　式（5）→　公式

$$a = \frac{\log_{10}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\log_{10} e \times (t_2 - t_1)}$$

ただし $t_1 = 0$、$V_2 = \frac{V_1}{10}$ の条件となる

$(V_1, t_1)(V_2, t_2)$をグラフから読取ると

$$a = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e \times t_2} = \frac{1}{0.4343 \times t_2}$$

$a = \frac{1}{0.4343\ t_2}$　式(6)

式(5)をより簡単に！
t_1=0のV_1と、V_1/10の時のt_2の値がグラフから求められれば、式（6）で簡単にaが求まる